IA/IEF DE KAFFRINE — ANNEE SCOLAIRE : 2025-2026
LYCEE EX-CEM DTP — NIVEAU : TS_2
CELLULE MATHEMATIQUES — Mr SARR

SERIE D'EXERCICES : FONCTIONS NUMERIQUES

EXERCICE 1

A) Déterminer la limite en a de la fonction f.

$f(x)=\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$; a =4. 3) $f(x)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x+1}}{1-x}$; a =1.

$f(x)=\frac{2-\sqrt{x+1}}{x-3}$; a =3. 4) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; a =3.

B) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en x_0

$1/f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ x<1 \\ \frac{x-2}{x+1} & si\ x\geq 1\end{cases}$; $x_0=1$

$4/f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+\sqrt{x^2}}{x^2-\sqrt{x^2}} & si\ x\neq 0 \\ -1 & si\ x=0\end{cases}$ $x_0=0$.

$1/f(x)=|3x-x^2|$; $x_0=3$

EXERCICE 2:

A) Déterminer une primitive F de la fonction f sur un intervalle I à préciser.

1.$f(x)=x^4-5x^3+3x^2-4x+2$

2.$f(x)=\frac{1}{(x-2)^3}-\frac{1}{(x+2)^3}$ 6.$f(x)=\frac{4x^2}{(x^3+8)^3}$

3.$f(x)=\left(x^2+\frac{1}{3}\right)(x^3+x)^4$ 7. $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+1$

4.$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$ 8. $f(x)=\frac{2x^3+x^2-2x}{x}$

5.$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$ 9.$f(x)=(\sin^2 x-3\sin x+8)\cos x$

B)Soit la fonction f definie sur $IR\backslash\{-2;2\}$ par : $f(x)=\frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3}$

a)Determiner les reels $a\ et\ b$ tels que pour tout reel $x\in IR\backslash\{-2;2\}$: $f(x)=\frac{a}{(x^2-2)^3}+\frac{b}{(x^2+2)^3}$

b)En deduire la primitive de f verifiant $F(0)=1$.

EXERCICE 3

Soit une fonction définie dans IR par :

$f(x)=\cos x-\frac{4}{3}cos^3(x)$

1°) a) Déterminer f' et f''. Vérifier que pour tout x de IR ; $f''=-9f$.

b) En déduire toutes les primitives de f sur IR

2°) Trouver les primitives sur IR qui s'annule en $\frac{\pi}{6}$.

PROBLEME 1

Le tableau suivant est un tableau de variation d'une fonction f :

X	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$			0		||		
$f(x)$	-2	↗	5	↘	1 || $+\infty$	↘	1

PARTIE A

En utilisant ce tableau donner les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\frac{-1}{x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(-2+\frac{1}{x}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x^2)$;

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\frac{2x-1}{x^2+x}\right)$.

PARTIE B

1.a) Déterminer le domaine de définition puis préciser les limites aux bornes de D_f.

b) Préciser les asymptotes éventuelles.

2)a) La courbe (C_f) admet-elle un extremum sur $]-\infty\,;0[$? Si oui lequel ?

b) Déterminer les signes de la fonction dérivée f' puis compléter le tableau.

c) Monter que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]-\infty\,;-2[$.

3)a) Soit h la restriction de f sur $]0\,;+\infty[$. Montrer que h réalise une bijection sur $]0\,;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

b) Quelle est la transformation qui permet de tracer la courbe $(C_{h^{-1}})$ à partir de la courbe (C_h) ?

c) Tracer dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$; la courbe $(\mathcal{C}_f)$; (C_{h-1}) et les asymptotes.

PROBLEME 2 :

Soit $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{x^2+1}-x & si\ \ x\leq 0 \\ \sqrt{x^2+2x}+x & si\ \ x>0\end{cases}$

1.a) Déterminer Df

b) Etudier la dérivabilité et la continuité de f en 0 ?

c)Calculer la dérivée f' de f puis étudier les variations de f

2)a) Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$

b) Préciser la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à ses asymptotes

3) Etudier les points d'inflexion à $(\mathcal{C}_f)$

Pour $x\in]-\infty;0]$,

4)Déterminer le point où $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente de coefficient directeur -1

5)Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

6)Montrer que f_1 ,la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;0]$ admet une fonction réciproque ${f_1}^{-1}$. Construire $(C_{{f_1}^{-1}})$.

7)a) Montrer que f_2 la restriction de f à l'intervalle $]0;+\infty[$ admet une fonction réciproque ${f_2}^{-1}$.

b) Détermine l'expression ${f_2}^{-1}$.

PROBLEME 3 :

Soit f la fonction définie :

$f(x)=\begin{cases} 2x\sqrt{|1-x^2|} & si\ \ x>0 \\ -x+\sqrt{x^2-2x} & si\ x\ \leq 0\end{cases}$

1)Déterminer Df, les limites aux bornes et préciser les asymptotes et branches infinies éventuelles.

2) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et 1. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

b) Calculer $f'(x)$ là où f' est définie, puis dresser le tableau de variation de f.

3) Tracer la courbe de f.

4) Soit h la restriction de f à l'intervalle$]-\infty\,;0]$.

a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité et le tableau de variation de h^{-1}.

c) Sans utiliser l'expression de $h^{-1}(x)$, calculer $(h^{-1})'(2)$.

5) Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère que celle de f.

PROBLEME 4:

On considère la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}1+x-\sqrt{x} & \text{si } x\geq 1\\ \sqrt{x^2-3x+3} & \text{si } x<1\end{cases}$$

1)a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

b) Déterminer la nature des branches infinies de la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$

c) Etudier la position de la courbe de f par rapport à son asymptote en $-\infty$

2)a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1. Interpréter les résultats obtenus.

b) Préciser le domaine de dérivabilité de f

c) Déterminer la fonction dérivée f' de f sur les intervalles où f est dérivable

d) Dresser le tableau de variation de f

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;1]$

a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty;1]$ vers J à préciser.

b) Dresser le tableau de variation de la réciproque g^{-1} de g

c) San s utiliser l'expression de $g^{-1}(x)$, calculer $(g^{-1})'(\sqrt{3})$

4) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1;4]$

Montrer que pour tout x de $[1;4]$, on a :

$\frac{1}{32}\leq h''(x)\leq\frac{1}{4}$ Puis en déduire que pour tout x de $[1;4]$ on a : $\frac{1}{4}(x-1)\leq h'(x)\leq\frac{1}{32}(x+20)$.

5) Tracer la courbe représentative de f et celle de g^{-1}dans un repère orthonormal direct $(o,\vec{i},\vec{j})$.

PROBLEME 5

Soit $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+4}-x & si\ x<0\\ \sqrt{|x^2-4|} & si\ x\geq 0\end{cases}$

1)Montrer que $D_f=IR$ et calculer les limites aux bornes de D_f.

2)Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

3)Montrer que $(\Delta): y=-2x$ et $(\Delta'): y=x$ sont respectivement les asymptotes à la courbe C_f en $-\infty$ *et en* $+\infty$.

4)a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et en 2.

b) Interpréter les résultats.

5)Etudier la dérivabilité de f sur les intervalles $]-\infty;0[$; $]0;2[$ *et* $]2;+\infty[$. En déduire l'ensemble de dérivabilité de f.

6. a. Calculer la dérivée de f sur son domaine de dérivabilité puis dresser le tableau de variation de f.

b. Monter que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution $\propto\ \epsilon[0;2[$ vérifier que $\propto\epsilon\left[1;\frac{3}{2}\right[$.

Que représente graphiquement $\propto$.

7. Montrer que Cf est au-dessus de $(\Delta): Y=-2x\ \ sur\ ]-\infty;0[$ et en dessous de $(\Delta'): Y=x\ \ sur\ ]\mathbf{2};+\infty[$.

8. Tracer soigneusement Cf dans le repère orthonormé.

9. Soit g la restriction de f à $]2;+\infty[$.

a. Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont-on précisera son ensemble de définition et ses variations.

b. Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur son ensemble de définition puis calculer $(g^{-1})'(\sqrt{5})$.

c)Expliciter $g^{-1}(x)$ puis tracer Cg^{-1} dans le même repère.

10. a) Montrer que pour tout $x\epsilon\left[1;\frac{3}{2}\right]$, $|f'(x)|\leq\frac{3\sqrt{7}}{7}$, puis énoncer le théorème d'inégalités des accroissements finis.

b) En déduire que pour tout $x\epsilon\left[1;\frac{3}{2}\right]$,

$|f(x)-\propto|\leq\frac{3\sqrt{7}}{7}|x-\propto|$.

PROBLEME 6

Partie A :

Soit g la fonction définie sur IR par :

$g(x)=2x^3-3x^2-1$.

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.
2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans IR et que $1<\alpha<2$.
3. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
3. Donner le signe de g(x).

Partie B :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}x\sqrt{-x}+1\ si\ x\leq 0\\ \frac{1-x}{1+x^3}\ \ si\ x>0\end{cases}$$

On note par (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i , j)

1. Déterminer le domaine de définition Df de f puis calculer les limites de f aux bornes de Df.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
3. Etudier les branches infinies.
4. Préciser l'ensemble de dérivabilité de f puis montrer que $\forall x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$
5. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
6. Construire (Cf).

Partie C :

Soit h la restriction de h à l'intervalle I =] - ∞; 0].

1. Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
2. h^{-1} la réciproque de h est-elle dérivable sur J ?.
3. Calculer h(0) puis étudier la dérivabilité de h^{-1} en 1
4. Construire $(C_{h^{-1}})$, la courbe de h^{-1} dans le repère

AU TRAVAIL !!!!